Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2017, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{2x + ay + z = a,} \\ \boldsymbol{x - 4y + (a+1)z = 1,} \\ \boldsymbol{4y - az = 0,} \end{cases}$ **se pide:**

a) **Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.**
b) **Resolver el sistema para** $\boldsymbol{a = 1}$.
c) **Resolver el sistema para** $\boldsymbol{a = 2}$.

Solución:

a) **Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.**

La matriz ampliada del sistema es:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} \\ &= 2(-4(-a) - (a+1)4) - a(1(-a) - (a+1)0) + 1(1(4) - (-4)0) \\ &= 2(4a - 4a - 4) - a(-a) + 1(4) \\ &= 2(-4) + a^2 + 4 \\ &= -8 + a^2 + 4 \\ &= a^2 - 4 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos del parámetro a:

$$|A| = a^2 - 4 = 0 \implies a = \pm\sqrt{4} \implies a = 2, \quad a = -2.$$

Caso 1: Si $\boldsymbol{a \neq 2}$ **y** $\boldsymbol{a \neq -2}$.
En este caso, $|A| \neq 0$, por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 3$. Como el número de incógnitas es 3, $\text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

Caso 2: Si $\boldsymbol{a = 2}$. Sustituimos $a = 2$ en la matriz ampliada:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ para $a = 2$, $\text{Rg}(A) < 3$.
El menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.
Estudiamos el rango de la ampliada A^*. Calculamos el determinante formado por C1, C2, C4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(2-2) = 0.$$

Calculamos C1, C3, C4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-2) = 0.$$

Calculamos C2, C3, C4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 4(1-6) + 2(2-(-8)) = 4(-5) + 2(10) = -20 + 20 = 0.$$

Como todos los menores de orden 3 de A^* son nulos, $\mathrm{Rg}(A^*) = 2$.
Dado que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 2 < 3$ (nº de incógnitas), el sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I.).

Caso 3: Si $a = -2$.
Sustituimos $a = -2$ en la matriz ampliada:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, así que $\mathrm{Rg}(A) < 3$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.
Estudiamos el rango de la ampliada A^*. Calculamos el determinante formado por C1, C2, C4:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(2-(-2)) = -4(4) = -16 \neq 0.$$

Como existe un menor de orden 3 no nulo en A^*, $\mathrm{Rg}(A^*) = 3$. Dado que $\mathrm{Rg}(A) = 2 \neq \mathrm{Rg}(A^*) = 3$, el sistema es Incompatible (S.I.).

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } a \neq 2 \textbf{ y } a \neq -2: \ \textbf{S.C.D. (Solución única)} \\ \textbf{Si } a = 2: \ \textbf{S.C.I. (Infinitas soluciones, 1 grado de libertad)} \\ \textbf{Si } a = -2: \ \textbf{S.I. (Sin solución)} \end{array}}$$

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

Para $a = 1$, estamos en el Caso 1 ($a \neq 2, a \neq -2$), por lo que el sistema es S.C.D. El sistema es:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = a^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$. Usamos la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(4-8) - 1(-1-0) + 1(4-0)}{-3} = \frac{-4-(-1)+4}{-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1(2-1)}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4(2-1)}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{a=1}, \textbf{ la solución es } \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{4}{3}}.}$$

c) Resolver el sistema para $a = 2$.

Para $a = 2$, estamos en el Caso 3. Como discutimos en el apartado a), $\text{Rg}(A) = 2$ y $\text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es compatible indeterminado (S.C.I.), lo que significa que tiene ∞ soluciones.

Reescribamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2, \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Dando a la z el valor del parámetro λ:

$4y - 2z = 0 \quad \rightarrow \quad 4y - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{\lambda}{2}$

$2x + 2y + z = 2 \quad \rightarrow \quad 2x + 2\frac{\lambda}{2} + \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1 - \lambda$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x = 1 - \lambda} \\ \boldsymbol{y = \frac{\lambda}{2}} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{array}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Geometría

Dados los puntos $P(1,-2,1), Q(-4,0,1), R(-3,1,2), S(0,-3,0)$, se pide:

a) **Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.**
b) **Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.**
c) **Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.**

Solución:

a) **Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.**

El plano π está determinado por el punto P y los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\vec{PQ} = Q - P = (-4-1, 0-(-2), 1-1) = (-5,2,0).$$

$$\vec{PR} = R - P = (-3-1, 1-(-2), 2-1) = (-4,3,1).$$

Estos vectores no son proporcionales ($\frac{-5}{-4} \neq \frac{2}{3}$), por lo que definen un plano. La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \\ PR_x & PR_y & PR_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(2\cdot 1 - 0\cdot 3) - (y+2)(-5\cdot 1 - 0\cdot(-4)) + (z-1)(-5\cdot 3 - 2\cdot(-4)) = 0$$

$$(x-1)(2) - (y+2)(-5) + (z-1)(-15+8) = 0$$

$$2(x-1) + 5(y+2) - 7(z-1) = 0$$

$$2x - 2 + 5y + 10 - 7z + 7 = 0$$

$$2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0}}$$

b) **Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.**

Recta r: Pasa por $P(1,-2,1)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = \vec{PQ} = (-5,2,0)$.
Recta s: Pasa por $R(-3,1,2)$ y tiene vector director $\vec{v}_s = \vec{RS} = S - R = (0-(-3), -3-1, 0-2) = (3,-4,-2)$.
Comprobamos si los vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales: $\frac{-5}{3} \neq \frac{2}{-4}$.
No son paralelos, por lo tanto, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{PR} = R - P = (-4,3,1)$ (calculado en el apartado a).
Estudiamos el producto mixto $[\vec{PR}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[\vec{PR}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(2(-2) - 0(-4)) - 3(-5(-2) - 0(3)) + 1(-5(-4) - 2(3))$$
$$= -4(-4) - 3(10) + 1(20 - 6)$$
$$= 16 - 30 + 14 = 0$$

Como el producto mixto es cero, los tres vectores son linealmente dependientes (coplanarios). Dado que los vectores directores no son paralelos, las rectas se cortan en un punto.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cortan.}}$$

c) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que forman lados del triángulo, por ejemplo $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\text{Área}(PQR) = \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$$

Ya calculamos los vectores en el apartado a): $\vec{PQ} = (-5, 2, 0)$ y $\vec{PR} = (-4, 3, 1)$. Calculamos su producto vectorial:

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - \vec{j}(-5 \cdot 1 - 0 \cdot (-4)) + \vec{k}(-5 \cdot 3 - 2 \cdot (-4))$$

$$= \vec{i}(2) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(-15 + 8) = (2, 5, -7).$$

Calculamos el módulo de este vector:

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = |(2, 5, -7)| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 25 + 49} = \sqrt{78}.$$

El área del triángulo es:

$$\text{Área}(PQR) = \frac{1}{2}\sqrt{78}ud^2$$

$$\boxed{\text{Área}\boldsymbol{(PQR) = \frac{\sqrt{78}}{2}}\ \textbf{ud}^2}$$

Ejercicio 3. Opción A. Análisis

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:

La función de concentración es $c(t) = te^{-t/2}$ para $t \geq 0$. Para encontrar el máximo, calculamos la primera derivada e igualamos a cero. Usamos la regla del producto:

$$c'(t) = 1 \cdot e^{-t/2} + t \cdot e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

Igualamos a cero: $c'(t) = 0$. Como $e^{-t/2}$ es siempre positivo, necesitamos:

$$1 - \frac{t}{2} = 0 \implies \frac{t}{2} = 1 \implies t = 2.$$

El único punto crítico es $t = 2$ horas. Estudiamos el signo de $c'(t)$ para determinar si es un máximo. Usamos la tabla de monotonía:

Intervalo	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $c'(t)$	$+$	$-$
Comportamiento $c(t)$	*Creciente* $\nearrow$	*Decreciente* $\searrow$

La tabla muestra que en $t = 2$ hay un cambio de crecimiento a decrecimiento, por lo tanto, se alcanza un máximo relativo (y absoluto, ya que es el único extremo en $t > 0$ y $c(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} c(t) = 0$). El valor máximo de la concentración se alcanza en $t = 2$ horas. Calculamos este valor máximo:

$$c(2) = 2 \cdot e^{-2/2} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

El valor máximo es $\frac{2}{e}$ mg/ml.

Ahora comparamos este valor máximo con la concentración máxima sin peligro (1 mg/ml). Sabemos que $e \approx 2.718$.

$$c(2) = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{2.718} < 1.$$

Como $e > 2$, entonces $2/e < 1$. La concentración máxima alcanzada es menor que 1 mg/ml.

$$\boxed{\textbf{Como } \frac{2}{e} < 1, \textbf{ no hay riesgo para el paciente.}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Análisis

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) **Determinar su dominio y asíntotas verticales.**
b) **Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.**
c) **Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.**

Solución:

a) **Determinar su dominio y asíntotas verticales.**

Dominio: La función es un cociente de polinomios. El dominio son todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador. $x-2=0 \implies x=2$. Dominio de $f(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Asíntotas Verticales:
Las asíntotas verticales pueden ocurrir en los valores que anulan el denominador, en este caso $x=2$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \frac{2^2+2+6}{0^-} = \frac{12}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \frac{12}{0^+} = +\infty.$$

Como los límites laterales tienden a infinito, hay una asíntota vertical en $x=2$.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } D=\mathbb{R}\setminus\{2\}. \textbf{ Asíntota vertical: } x=2.}$$

b) **Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.**

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x} = \frac{x^2+x+6}{x(x-2)} = \frac{x^2+x+6}{x^2-2x}.$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Dividimos numerador y denominador por la máxima potencia de x (x^2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1+0+0}{1-0} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1}$$

c) **Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.**

Calculamos la integral definida $\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}dx$. Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, realizamos la división polinómica:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x^2+x+6 & \underline{x-2} \\
- & (x^2-2x) & x+3 \\ \cline{2-2}
 & 3x+6 & \\
- & (3x-6) & \\ \cline{2-2}
 & 12 &
\end{array}$$

Entonces, $\frac{x^2+x+6}{x-2} = x+3+\frac{12}{x-2}$. Ahora integramos:

$$\int \left(x+3+\frac{12}{x-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 12\ln|x-2|.$$

Aplicamos la regla de Barrow entre 3 y 5:

$$\int_3^5 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 12\ln|x-2|\right]_3^5 = \left(\frac{5^2}{2} + 3(5) + 12\ln|5-2|\right) - \left(\frac{3^2}{2} + 3(3) + 12\ln|3-2|\right) =$$
$$= \left(\frac{25}{2} + 15 + 12\ln(3)\right) - \left(\frac{9}{2} + 9 + 12\ln(1)\right) = \left(\frac{25+30}{2} + 12\ln(3)\right) - \left(\frac{9+18}{2} + 12\cdot 0\right)$$
$$= \left(\frac{55}{2} + 12\ln(3)\right) - \left(\frac{27}{2}\right) = \frac{55-27}{2} + 12\ln(3) = \frac{28}{2} + 12\ln(3) = 14 + 12\ln(3).$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_3^5 f(x)dx = 14 + 12\ln(3)}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Análisis

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sin(x)$, se pide:

a) Calcular $\lim_{x\to 0}(f(x) - \frac{2}{g(x)})$.
b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1,2)$.
c) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Solución:

a) Calcular $\lim_{x\to 0}(f(x) - \frac{2}{g(x)})$.

El límite es:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\sin(x)}\right) = (\infty - \infty) \quad \text{(Indeterminación)}$$

Combinamos las fracciones:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x) - 2x}{x\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$L \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x) - 2}{1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x)} = \frac{2\cos(0) - 2}{\sin(0) + 0\cdot\cos(0)} = \frac{2(1) - 2}{0 + 0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$L \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)}{\cos(x) + (1\cdot\cos(x) + x(-\sin(x)))} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)}$$

Evaluamos el límite:

$$L = \frac{-2\sin(0)}{2\cos(0) - 0\cdot\sin(0)} = \frac{-2(0)}{2(1) - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(f(x) - \frac{2}{g(x)}) = 0}$$

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1,2)$.

La función es $f(x) = \frac{2}{x}$. El punto de tangencia es $(1, f(1))$. $f(1) = \frac{2}{1} = 2$. El punto es $(1, 2)$.
La ecuación de la recta tangente se rige por la expresión $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.
Calculamos la derivada: $f(x) = 2x^{-1} \implies f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.
Evaluamos la derivada en $x = 1$: $f'(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$.
La ecuación de la tangente es:

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y - 2 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 4.$$

$$\boxed{y = -2x + 4}$$

c) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Primero, encontramos los puntos de corte entre $y = \frac{2}{x}$ y $y = -x + 3$.

$$\frac{2}{x} = -x + 3$$

$$2 = -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Los puntos de corte son $x = 1$ y $x = 2$.
Para $x = 1$, $y = 2/1 = 2$ o $y = -1 + 3 = 2$. Punto $(1, 2)$.
Para $x = 2$, $y = 2/2 = 1$ o $y = -2 + 3 = 1$. Punto $(2, 1)$.
El área es la integral definida de la diferencia entre la función superior y la inferior en el intervalo $[1, 2]$.
En el intervalo $(1, 2)$, tomamos un punto de prueba, por ejemplo $x = 1.5$. $f(1.5) = 2/1.5 = 4/3 \approx 1.33$. $y(1.5) = -1.5 + 3 = 1.5$.
La recta $y = -x + 3$ está por encima de la curva $y = 2/x$ en el intervalo $[1, 2]$.
El área es:

$$\text{Área} = \int_1^2 \left((-x + 3) - \left(\frac{2}{x}\right)\right) dx = \int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x}\right) dx$$

Calculamos la integral:

$$\left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|\right]_1^2$$

$$\left(-\frac{2^2}{2} + 3(2) - 2\ln|2|\right) - \left(-\frac{1^2}{2} + 3(1) - 2\ln|1|\right) =$$

$$= \left(-\frac{4}{2} + 6 - 2\ln(2)\right) - \left(-\frac{1}{2} + 3 - 2(0)\right) = (-2 + 6 - 2\ln(2)) - (-\frac{1}{2} + 3) =$$

$$= (4 - 2\ln(2)) - \left(\frac{5}{2}\right) = 4 - \frac{5}{2} - 2\ln(2) = \frac{8-5}{2} - 2\ln(2) = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

$$\boxed{\text{Área} = \mathbf{\frac{3}{2} - 2\ln(2)}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Álgebra

Dadas las matrices $\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, **se pide:**

a) **Determinar la matriz $\boldsymbol{P^{-1}}$ inversa de la matriz P.**
b) **Determinar la matriz $\boldsymbol{B^{-1}}$ inversa de la matriz $\boldsymbol{B = P^{-1}J^{-1}}$.**
c) **Calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{A^2}$ siendo $\boldsymbol{A = PJP^{-1}}$.**

Solución:

a) **Determinar la matriz $\boldsymbol{P^{-1}}$ inversa de la matriz P.**

Calculamos el determinante de P:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 2 - 2 \cdot 3) - 2(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) + 1(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) =$$
$$= 1(4-6) - 2(6-4) + 1(9-4) = 1(-2) - 2(2) + 1(5) = -2 - 4 + 5 = -1.$$

Como $|P| = -1 \neq 0$, P tiene inversa.

Calculamos la matriz adjunta de P:

$$\mathrm{Adj}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-6) & -(6-4) & (9-4) \\ -(4-3) & (2-2) & -(3-4) \\ (4-2) & -(2-3) & (2-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la traspuesta de la adjunta:

$$(\mathrm{Adj}(P))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

La inversa es $P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\mathrm{Adj}(P))^t$:

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}}}$$

b) **Determinar la matriz $\boldsymbol{B^{-1}}$ inversa de la matriz $\boldsymbol{B = P^{-1}J^{-1}}$.**

Usamos la propiedad de la inversa de un producto: $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$. Entonces, $B^{-1} = (P^{-1}J^{-1})^{-1}$.
Aplicando la propiedad: $B^{-1} = (J^{-1})^{-1}(P^{-1})^{-1} = JP$. Tenemos $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el producto JP:

$$B^{-1} = JP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(1)+0(3)+0(2) & -1(2)+0(2)+0(3) & -1(1)+0(2)+0(2) \\ 0(1)+2(3)+0(2) & 0(2)+2(2)+0(3) & 0(1)+2(2)+0(2) \\ 0(1)+0(3)+1(2) & 0(2)+0(2)+1(3) & 0(1)+0(2)+1(2) \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}}}$$

c) Calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{A^2}$ siendo $\boldsymbol{A = PJP^{-1}}$.

Usamos las propiedades de los determinantes: $|XY| = |X||Y|$ y $|X^{-1}| = 1/|X|$.

$$|A| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |P||J|\frac{1}{|P|} = |J|.$$

Calculamos el determinante de J (matriz diagonal):

$$|J| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -2.$$

Por lo tanto, $|A| = -2$. Ahora calculamos el determinante de A^2:

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |J|^2 = (-2)^2 = 4.$$

$$\boxed{\boldsymbol{|A^2| = 4}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

a) **Determine la distancia entre las rectas** $r_1 \equiv x = y = z$ **y** $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$.

b) **Obtenga el punto de corte de la recta** $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ **con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.**

Solución:

a) **Determine la distancia entre las rectas** $r_1 \equiv x = y = z$ **y** $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$.

Recta r_1*:*
Pasa por el origen $A(0,0,0)$ y tiene vector director $\vec{v}_1 = (1,1,1)$.

Recta r_2*:* Buscamos un punto y vector director.
Hacemos $x = \lambda$.
De la primera ecuación: $y = 1 - x = 1 - \lambda$.
De la segunda ecuación: $z = x + 1 = \lambda + 1$.
Ecuación paramétrica de r_2: $(\lambda, 1 - \lambda, \lambda + 1)$.
Un punto de r_2 (haciendo $\lambda = 0$) es $B(0,1,1)$.
El vector director de r_2 es $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$.
Posición relativa: Los vectores directores $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$ no son proporcionales ($\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$).
Las rectas se cortan o se cruzan. Vector $\vec{AB} = B - A = (0,1,1)$. Producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0(1 - (-1)) - 1(1 - 1) + 1(-1 - 1) = 0 - 0 + 1(-2) = -2.$$

Como el producto mixto es $-2 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Distancia:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$

Ya tenemos $|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |-2| = 2$.
Calculamos $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 - (-1)) - \vec{j}(1 - 1) + \vec{k}(-1 - 1) = (2, 0, -2).$$

Módulo: $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |(2,0,-2)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Distancia:

$$d(r_1, r_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}}}$$

b) **Obtenga el punto de corte de la recta** $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ **con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.**

Primero, escribimos la recta s en forma paramétrica. De las igualdades: $x = 2 - y \implies y = 2 - x$. $x = z - 1 \implies z = x + 1$. Haciendo $x = \lambda$:

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto de s es $P_s(0, 2, 1)$ (para $\lambda = 0$) y su vector director es $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$.
Sea π el plano perpendicular a s que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$.
El vector normal al plano π es el vector director de s: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (1, -1, 1)$.
La ecuación del plano π es de la forma $1x - 1y + 1z + D = 0$.
Como pasa por el origen $O(0, 0, 0)$: $1(0) - 1(0) + 1(0) + D = 0 \implies D = 0$.
La ecuación del plano es $\pi \equiv x - y + z = 0$.
Buscamos el punto de corte M entre la recta s y el plano π.
Sustituimos las coordenadas paramétricas de s en la ecuación de π:

$$(\lambda) - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0$$

$$\lambda - 2 + \lambda + 1 + \lambda = 0$$

$$3\lambda - 1 = 0 \implies 3\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{3}.$$

Sustituimos $\lambda = 1/3$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$x = \frac{1}{3}$$

$$y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6 - 1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$z = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3 + 1}{3} = \frac{4}{3}$$

El punto de corte es $M(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } M\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right).}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) **Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.**

b) **Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?**

Solución:

Definimos los sucesos:

C = "Marta va al cine" ($P(C) = 0.40$)

T = "Marta va de compras" ($P(T) = 0.30$)

V = "Marta juega a videojuegos" ($P(V) = 0.30$)

(Notar que $P(C) + P(T) + P(V) = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1$, forman una partición del espacio muestral).

B = "Marta queda con sus compañeros de baloncesto"

$\overline{B}$ = "Marta NO queda con sus compañeros de baloncesto"

Datos de probabilidades condicionadas:

$P(B|C) = 0.60$ (Prob. quedar con comp. si va al cine)

$P(B|T) = 0.20$ (Prob. quedar con comp. si va de compras)

$P(B|V) = 0.80$ (Prob. quedar con comp. si juega videojuegos)

Calculamos las probabilidades complementarias (no quedar con compañeros):

$P(\overline{B}|C) = 1 - P(B|C) = 1 - 0.60 = 0.40$

$P(\overline{B}|T) = 1 - P(B|T) = 1 - 0.20 = 0.80$

$P(\overline{B}|V) = 1 - P(B|V) = 1 - 0.80 = 0.20$

a) **Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.**

Usamos el Teorema de la Probabilidad Total para calcular $P(\overline{B})$:

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B}|C)P(C) + P(\overline{B}|T)P(T) + P(\overline{B}|V)P(V)$$

$$P(\overline{B}) = (0.40)(0.40) + (0.80)(0.30) + (0.20)(0.30)$$

$$P(\overline{B}) = 0.16 + 0.24 + 0.06 = 0.46$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.46}}$$

b) **Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?**

Se pide calcular $P(C|B)$. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)}$$

Necesitamos calcular $P(B)$ primero. Podemos usar el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|T)P(T) + P(B|V)P(V)$$

$$P(B) = (0.60)(0.40) + (0.20)(0.30) + (0.80)(0.30)$$

$$P(B) = 0.24 + 0.06 + 0.24 = 0.54$$

(Alternativamente, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.46 = 0.54$).
Ahora aplicamos Bayes:

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{(0.60)(0.40)}{0.54} = \frac{0.24}{0.54} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(C|B) = \frac{4}{9} \approx 0.4444}}$$